Ref: Zuily Queffelec p. 534

Leçon 250 261 262 266

Développement : Théorème de Lévy et application au TCL :

Rappels:

On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées.
On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et de limite nulle à l'infini. On a donc $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$.

On dit qu'une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a. réelle X si $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$, on a $\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X)]$, dans $\mathbb{R}$.

Lemme 1: Soit $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des v.a.r. On a équivalence entre

i) (X_n) converge en loi vers X

ii) Pour tout $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$.

(Autrement dit il suffit de tester la convergence des espérances sur les fct de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$).

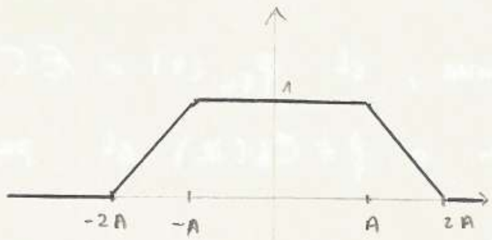
Preuve:

$\boxed{\Rightarrow}$ Vient du fait que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.

Il existe $A > 0$ tq $\mathbb{P}_X(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) = \mathbb{P}(|X| > A) < \varepsilon$.

On considère alors la fonction φ valant 1 sur $[-A, A]$, valant 0 sur $\mathbb{R} \setminus [-2A, 2A]$, et affine par morceaux. En particulier, $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.



graphe de φ

On a

$$\int_{\mathbb{R}} 1-\varphi \, d\mathbb{P}_X \leq \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus[-A,A]} \, d\mathbb{P}_X \leq \varepsilon$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)] &= \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f \, d\mathbb{P}_X \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) \, d\mathbb{P}_{X_n} + \left(\int_{\mathbb{R}} f\varphi \, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi \, d\mathbb{P}_X\right) - \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi) \, d\mathbb{P}_X \\ &= A_n + B_n + C_n \end{aligned}$$

Comme $f\varphi$ est à support compact donc dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\lim_{n\to+\infty} B_n = 0$. Ensuite, $|C_n| \leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon$. Enfin, on a

$$|A_n| \leq \|f\|_\infty \cdot \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathbb{P}_{X_n}\right)$$

Comme $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, on a $\limsup_{n\to+\infty} |A_n| \leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathbb{P}_X\right)$

$$\leq \|f\|_\infty \cdot \varepsilon$$

Ainsi $\limsup_{n\to+\infty} |\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leq 2 \cdot \varepsilon \cdot \|f\|_\infty$ ■

Théorème 2 : (Lévy)

Soit $X, (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des v.a.r. On a équivalence entre :

(i) (X_n) converge en loi vers X

(ii) La suite $(\varphi_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ des fonctions caractéristique des X_n converge simplement vers φ_X la fct caractéristique de X.

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ $x \mapsto e^{itx}$ est bornée et continue, et $\varphi_{X_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itX_n}]$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ et $f = \hat{\varphi}$. On a $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et par le théorème de Fubini, on a :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \varphi(t)\, dt\, d\mathbb{P}_{X_n}(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_{\mathbb{R}} e^{-itx}\, d\mathbb{P}_{X_n}(x)\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \varphi_{X_n}(-t)\, dt$$
$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \varphi_X(-t)\, dt = \mathbb{E}[f(X)]$$ par convergence dominée.

Nous avons donc obtenu le résultat pour l'image de $L^1(\mathbb{R})$ par la transformée de Fourier. Cette image contient $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, qui est dense dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, soit donc $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tq $\|f-g\|_\infty < \varepsilon$. On a alors :

$$|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \leqslant \underbrace{|\mathbb{E}[(f-g)(X_n)]|}_{\leqslant \|f-g\|_\infty} + \underbrace{|\mathbb{E}[g(X_n)] - \mathbb{E}[g(X)]|}_{\substack{\text{prouvé précédement} \\ \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}} + \underbrace{|\mathbb{E}[(g-f)(X)]|}_{\leqslant \|f-g\|_\infty}$$

■

Lemme 3 :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers $z \in \mathbb{C}$.
On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = e^z$.

Preuve :

La suite $\frac{z_n}{n}$ tendant vers 0, on peut supposer que $1 + \frac{z_n}{n}$ ne touche pas la demi droite $\mathbb{R}^-$, on utilise alors la détermination principale du logarithme : $\log(z) = \ln(|z|) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x+|z|}\right)$ où $z = x + iy$.

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ ouvert étoilé par rapport à 1. Donc $\forall z \in \Omega$, $[1,z] \subset \Omega$. Le segment $[1,z]$ se paramétrise par $w = (1-t)\cdot 1 + tz = 1 + t(z-1)$, $t \in [0,1]$. $dw = (z-1)\,dt$

$$(\log z)' = \frac{1}{z} \Rightarrow \log(z) = \int_{[1,z]} \frac{1}{w}\, dw$$
$$= \int_0^1 \frac{z-1}{1+t(z-1)}\, dt$$

donc $\log(z+1) = \int_0^1 \frac{z}{1+tz}\, dt$

$$= \int_0^1 z \cdot \frac{1}{1+tz}\, dt$$
$$= \int_0^1 z\,(1 - tz + o(z))\, dt \qquad \text{pour } z \to 0$$
$$= \int_0^1 z + o(z^2)\, dt$$
$$= z + o(z^2)$$

Ainsi $\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{on applique} \\ \exp \circ \ln}}{=} \exp\left(z_n + o(z_n^2)\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^z$. ∎

Théorème 4 : Le théorème central limite.

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a.r. indépendantes et identiquement distribuées admettant des moments d'ordre 2. On pose $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1]$. En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, on a :

$$\frac{S_n - \mu n}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve :

On se ramène sans perte de généralité au cas où $\sigma = 1$, $\mu = 0$.

On doit alors montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t)$ converge vers $e^{-t^2/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

En posant $\varphi := \varphi_{X_1}$, comme $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $\varphi'(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi''(0) = \mathbb{E}[-X_1^2] = -1$.

On a :

$$\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{it\frac{X_k}{\sqrt{n}}}\right]$$ car les X_i sont indépendants

$$= \left(\mathbb{E}\left[e^{it\frac{X_1}{\sqrt{n}}}\right]\right)^n$$ car les X_i sont de même loi

$$= \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$ par un DL : $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi(0) + \frac{t}{\sqrt{n}}\varphi'(0) + \dots$

et on conclut par le lemme. ∎

<u>Question 1</u> Pourquoi peut on se ramener au cas où $\sigma = 1$ et $\mu = 0$?

↳ si on remplace X_i par $\frac{X_i - \mathbb{E}[X_i]}{\sqrt{Var(X_i)}}$, les calculs donnent le même résultat.

<u>Question 2</u> : Calculer $\varphi_{N(0,1)}(t)$.

Si $X \sim N(0,1)$, $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$

Ainsi $\varphi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx - x^2/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\, e^{-t^2/2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2} \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\, dx$$

soit $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\, dx$

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\left(itx + \frac{t^2}{2}\right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -i\left(e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\right)' dx$$

$$= -i \cdot \left[e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= 0$$

donc $F(t) = F(0) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-1/2 \, x^2} dx$

$= \sqrt{2\pi}$

Ainsi $\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t^2/2} \sqrt{2\pi} = e^{-t^2/2}$ ■

Question 3 : Calculer $\varphi_{N(\mu, \sigma^2)}$?

On sait que $\varphi_{N(0,1)}(t) = e^{-t^2/2}$

On $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X \doteq \sigma Z + \mu$ où $Z \sim N(0,1)$

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathbb{E}[e^{itX}] \\
&= \mathbb{E}[e^{it(\sigma Z + \mu)}] \\
&= \mathbb{E}[e^{i(\sigma t)Z}] e^{it\mu} \\
&= \varphi_Z(\sigma t) \cdot e^{it\mu} \\
&= e^{-\sigma^2 t^2/2} e^{it\mu}
\end{aligned}$$